

1. гиа математика дополнительно

4. ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

4.1. Алгебра

- 4.1.1. Вычислите: $\sqrt{(3-\sqrt{6})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{6})^2}$.
- 4.1.2. Вычислите: $\sqrt{(5-\sqrt{11})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$.
- 4.1.3. Вычислите: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \left(\frac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right) \cdot \sqrt{2}$.
- 4.1.4. Вычислите: $\frac{3}{7}(4-\sqrt{2}) \left(\frac{3}{1-\sqrt{2}} + \frac{2}{2+\sqrt{2}} + \frac{3}{3-2\sqrt{2}}\right)$.
- 4.1.5. Вычислите: $\sqrt{14-\sqrt{132}} \cdot (14+\sqrt{132}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{11})$.
- 4.1.6. Вычислите: $\sqrt{21-\sqrt{440}} \cdot (21+\sqrt{440}) \cdot (\sqrt{10}-\sqrt{11})$.
- 4.1.7. Найдите значение выражения $(x-8)(x-7)(x-3)(x-2)$ при $x = 5 - \sqrt{7}$.
- 4.1.8. Найдите значение выражения $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)$ при $x = \sqrt{5} - 3$.
- 4.1.9. Какое из чисел больше: $\sqrt{6} + \sqrt{10}$ или $3 + \sqrt{7}$?
- 4.1.10. Какое из чисел больше: $\sqrt{5} + \sqrt{10}$ или $2 + \sqrt{11}$?
- 4.1.11. Разложите на множители: $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 4x + 3y$.
- 4.1.12. Разложите на множители: $4x^2 - 20xy + 25y^2 + 5y - 2x$.
- 4.1.13. Сократите дробь $\frac{4a^2 - 4b^2 + b - a}{1 - 4b - 4a}$.
- 4.1.14. Сократите дробь $\frac{5b - 5a - 1}{a + b + 5a^2 - 5b^2}$.
- 4.1.15. Сократите дробь $\frac{4x^2 - 20x + 25}{2x^2 + x - 15}$.
- 4.1.16. Сократите дробь $\frac{4x^2 + 12x + 9}{2x^2 - x - 6}$.
- 4.1.17. При каких значениях a сократима дробь $\frac{x^2 + x - 2}{x + a}$?
- 4.1.18. При каких значениях a сократима дробь $\frac{x^2 - 7x - 8}{x - a}$?
- 4.1.19. Упростите выражение $\left(\frac{3x}{x-4} - \frac{6x}{x^2 - 8x + 16}\right) : \frac{x-6}{16-x^2} + \frac{24x}{x-4}$.
- 4.1.20. Упростите выражение $\left(\frac{15x}{x-3} + \frac{5x}{x^2 - 6x + 9}\right) : \frac{3x-8}{9-x^2} + \frac{30x}{x-3}$.

4.1.21. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x - y = -11, \\ \frac{x-1}{2} + \frac{y}{3} = 2. \end{cases}$

4.1.22. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x - y = 10, \\ \frac{x}{3} + \frac{y+1}{5} = 1. \end{cases}$

4.1.23. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-30; -8)$ и $B(35; 5)$. Выясните, в одной или разных полуплоскостях располагаются эти точки относительно прямой $y = \frac{1}{4}x - 2$.

4.1.24. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-13; 75)$ и $B(15; -65)$. Выясните, в одной или разных полуплоскостях располагаются эти точки относительно прямой $y = -5x + 9$.

4.1.25. Найдите сумму всех положительных членов арифметической прогрессии: 12,8; 12,5; ...

4.1.26. Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии: -7,2; -6,9; ...

4.1.27. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2x - 1)(y + 2) = 0, \\ x^2 - 4x + y = -5. \end{cases}$

4.1.28. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2x + 3)(y + 8) = 0, \\ x^2 + 4x + y = -3. \end{cases}$

4.1.29. Между числами 3 и 12 вставьте три числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

4.1.30. Между числами 2 и 18 вставьте три числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

4.1.31. Решите уравнение $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$.

4.1.32. Решите уравнение $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$.

4.1.33. Решите уравнение $\left(\frac{x^2 - 3x}{2} + 3\right)\left(\frac{x^2 - 3x}{2} - 4\right) = -10$.

4.1.34. Решите уравнение $\left(2 - \frac{x^2 + 2x}{3}\right)\left(4 - \frac{x^2 + 2x}{3}\right) = 3$.

4.1.35. Решите уравнение $(x^2 + 6x)^2 + 2(x + 3)^2 = 81$.

4.1.36. Решите уравнение $(x^2 - 2x)^2 + (x - 1)^2 = 1$.

4.1.37. Решите уравнение $\frac{x-3}{x+4} + \frac{x}{x-4} = \frac{32}{x^2-16}$.

4.1.38. Решите уравнение $\frac{x+4}{x-5} + \frac{x}{x+5} = \frac{50}{x^2-25}$.

4.1.39. Решите уравнение $x^2 + 3\sqrt{x^2} - 10 = 0$.

4.1.40. Решите уравнение $x^2 + 6\sqrt{x^2} - 7 = 0$.

4.1.41. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 7, \\ x^2 + y^2 = 9 + 2xy. \end{cases}$

4.1.42. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 25 + 2xy. \end{cases}$

4.1.43. Решите неравенство $\frac{2x-7}{6} + \frac{7x-2}{3} < 3 - \frac{1-x}{2}$.

4.1.44. Решите неравенство $\frac{4x+13}{10} - \frac{3+2x}{4} < \frac{6-7x}{20} - 1$.

4.1.45. Решите неравенство $(\sqrt{6} - 2,5)(7 - 6x)(2\sqrt{7} - 5) < 0$.

4.1.46. Решите неравенство $(\sqrt{12} - 3,5)(5 - 4x)(3\sqrt{5} - 7) < 0$.

4.1.47. Найдите область определения выражения $\frac{\sqrt{3x^2 - x - 14}}{x^2 - 9}$.

4.1.48. Найдите область определения выражения $\frac{\sqrt{3x^2 - 5x + 2}}{x^2 - 4}$.

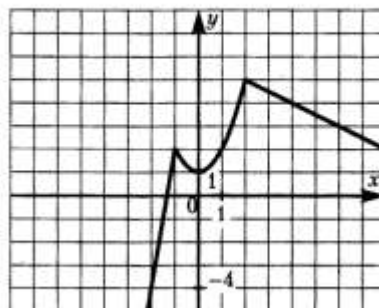
4.1.49. Постройте график функции $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 3, & \text{если } x \geq 2, \\ x - 1, & \text{если } x < 2. \end{cases}$

4.1.50. Постройте график функции $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1, & \text{если } x \geq 4, \\ -x + 5, & \text{если } x < 4. \end{cases}$

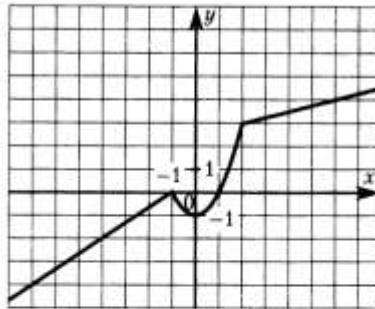
4.1.51. При каком значении p вершины парабол $y = x^2 - 2px - 1$ и $y = -x^2 + 4px + p$ расположены по разные стороны от оси x ?

4.1.52. При каком значении p вершины парабол $y = x^2 - 4px + p$ и $y = -x^2 + 8px + 4$ расположены по одну сторону от оси x ?

4.1.53. График функции состоит из двух лучей и части параболы (см. рисунок). Задайте эту функцию формулами.



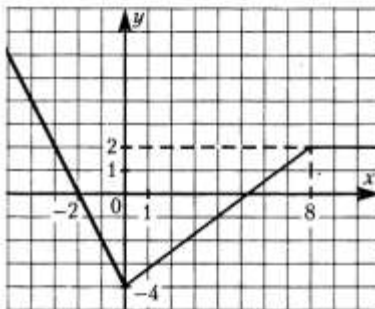
4.1.54. График функции состоит из двух лучей и части параболы (см. рисунок). Задайте эту функцию формулами.



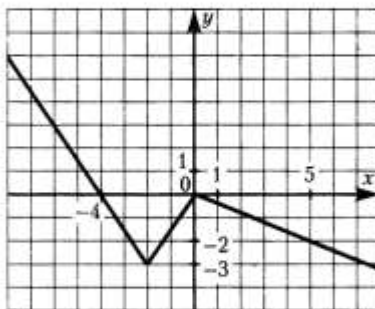
4.1.55. При каких значениях p прямая $y = 2x + p$ образует с осями координат треугольник, площадь которого равна 4?

4.1.56. При каких значениях p прямая $y = 2x + p$ образует с осями координат треугольник, площадь которого равна 9?

4.1.57. График функции состоит из двух лучей и отрезка (см. рисунок). Задайте функцию формулами.



4.1.58. График функции состоит из двух лучей и отрезка (см. рисунок). Задайте функцию формулами.



4.1.59. Найдите все положительные значения k , при которых прямая $y = kx$ пересекает в двух точках ломаную, заданную условиями:

$$y = \begin{cases} -3x - 4, & \text{если } x < -2, \\ 2, & \text{если } -2 \leq x \leq 2, \\ 3x - 4, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

4.1.60. Найдите все положительные значения k , при которых прямая $y = kx$ пересекает в двух точках ломаную, заданную условиями:

$$y = \begin{cases} -2x - 5, & \text{если } x < -3, \\ 1, & \text{если } -3 \leq x \leq 3, \\ 2x - 5, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

4.1.61. Найдите значения p , при которых парабола $y = -2x^2 + px - 50$ касается оси x . Для найденных значений p определите координаты точек касания.

4.1.62. Найдите значения p , при которых парабола $y = 3x^2 + px + 48$ касается оси x . Для найденных значений p определите координаты точек касания.

4.1.63. Найдите c и постройте график функции $y = x^2 + c$, если известно, что прямая $y = -4x$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

4.1.64. Найдите c и постройте график функции $y = x^2 + c$, если известно, что прямая $y = -6x$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

4.1.65. Постройте график $y = (\sqrt{4x - x^2})^2$, и определите, при каких значениях k прямая $y = kx + 9$ имеет с графиком ровно две общие точки.

4.1.66. Постройте график $y = -(\sqrt{-x^2 - 2x})^2$, и определите, при каких значениях k прямая $y = kx - \frac{1}{4}$ имеет с графиком ровно две общие точки.

4.1.67. При каких значениях p прямая $y = p$ имеет три общие точки с графиком функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x(x - 2), & \text{если } x \geq 0, \\ x(2 - x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$

4.1.68. При каких значениях p прямая $y = p$ имеет три общие точки с графиком функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x(x - 4), & \text{если } x \geq 0, \\ x(4 - x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$

4.1.69. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 - x - 6)(x^2 - x - 2)}{x^2 - 4}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

4.1.70. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 4)}{1 - x^2}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

4.1.71. Постройте график функции $y = -|x^2 + 2x - 3|$ и найдите, при каких значениях m прямая $y = m$ пересекает построенный график ровно в трёх точках.

4.1.72. Постройте график функции $y = |x^2 + 6x + 5|$ и найдите, при каких значениях m прямая $y = m$ пересекает построенный график ровно в трёх точках.

4.1.73. Найдите c и постройте график функции $y = x^2 + c$, если известно, что прямая $y = 4x$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

4.1.74. Найдите c и постройте график функции $y = x^2 + c$, если известно, что прямая $y = 6x$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

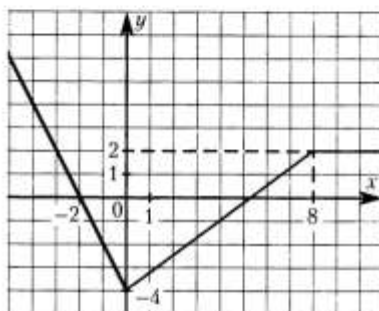
4.1.75. Постройте график функции $y = |x - 2| + |x + 1|$.

4.1.76. Постройте график функции $y = |x - 2| - |x + 1|$.

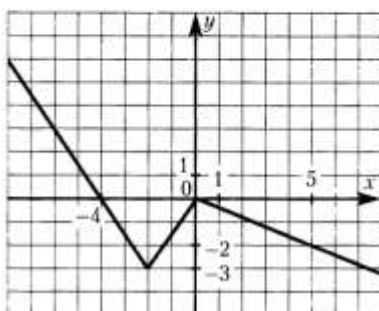
4.1.77. При каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = |x - 2| + |x + 1|$ ровно две общие точки.

4.1.78. При каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = |x - 2| - |x + 1|$ ровно две общие точки.

4.1.79. График функции состоит из двух лучей и отрезка (см. рисунок). Задайте функцию формулой вида $y = a|x| + b|x - 8| + kx + c$.



4.1.80. График функции состоит из двух лучей и отрезка (см. рисунок). Задайте функцию формулой вида $y = a|x + 2| + b|x| + kx + c$.



4.1.81. При смешивании первого раствора кислоты, концентрация которого 20%, и второго раствора этой же кислоты, концентрация которого 50%, получился раствор, содержащий 30% кислоты. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?

4.1.82. При смешивании первого раствора кислоты, концентрация которого 40%, и второго раствора этой же кислоты, концентрация которого 48%, получили раствор с концентрацией 42%. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?

4.1.83. В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 84, а сумма второго и третьего членов равна 112. Найдите первые три члена этой прогрессии.

4.1.84. В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 40, а сумма второго и третьего членов равна 60. Найдите первые три члена этой прогрессии.

4.1.85. Теплоход проходит по течению до пункта назначения 126 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите собственную скорость теплохода (в неподвижной воде), если скорость течения равна 2 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается ровно через сутки после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

4.1.86. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 160 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 18 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается ровно через 20 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

4.1.87. Бассейн наполняется двумя трубами, действующими одновременно, за 2 часа. За сколько часов может наполнить бассейн первая труба, если она, действуя одна, наполняет бассейн на 3 часа быстрее, чем вторая?

4.1.88. На изготовление 180 деталей первый рабочий тратит на 3 часа меньше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 3 детали больше?

4.1.89. Из города A в город B выехал автобус. Спустя 0,5 ч вслед за ним из пункта A выехал автомобиль. Через 1,1 ч после своего выезда он, обогнав автобус, находился на расстоянии 2 км от него. Найдите скорость автобуса, если известно, что она на 20 км/ч меньше скорости автомобиля.

4.1.90. Из города A в город B выехала грузовая машина. Спустя 1,2 ч из пункта A вслед за ней выехал автобус. Через 0,8 ч после своего выезда он отставал от машины на 24 км. Найдите скорость автобуса, если известно, что она больше скорости грузовой машины на 30 км/ч.

4.1.91. Туристы на моторной лодке прошли два часа против течения реки, после чего повернули обратно и 12 минут шли по течению, выключив мотор. Затем они включили мотор и через один час после этого прибыли к месту старта. Во сколько раз скорость течения реки меньше собственной скорости лодки? Скорость лодки в неподвижной воде (собственная скорость лодки) и скорость течения реки считаются постоянными.

4.1.92. Туристы на моторной лодке прошли один час по течению реки, после чего выключили мотор и плыли по течению реки ещё 30 минут. Затем они, включив мотор, повернули обратно и через три часа после этого прибыли к месту старта. Во сколько раз скорость течения реки меньше собственной скорости лодки? Скорость лодки в неподвижной воде (собственная скорость лодки) и скорость течения реки считаются постоянными.

4.1.93. Три экскаватора разной производительности роют котлован. Работа будет выполнена, если каждый проработает 12 часов. Она также будет выполнена, если первый проработает 8 часов, второй — 16, а третий — 10. Сколько часов должен проработать второй экскаватор, чтобы завершить работу, если до него первый проработал 10 часов, а третий — 11?

4.1.94. Три самосвала разной грузоподъемности возят грунт. Он будет вывезен полностью, если все сделают по 8 рейсов. Грунт также будет вывезен, если первый самосвал сделает 4 рейса, второй — 2, третий — 16 рейсов. Если первый и третий совершат соответственно 6 и 12 рейсов, то сколько рейсов нужно сделать второму самосвалу, чтобы весь грунт был вывезен?

4.1.95. Теплоход идёт по течению реки в 5 раз медленнее, чем скутер против течения, а по течению скутер идёт в 9 раз быстрее, чем теплоход против течения. Во сколько раз собственная скорость скутера больше собственной скорости теплохода? (Собственная скорость — скорость в неподвижной воде.)

4.1.96. Теплоход идёт по течению реки в 2 раза медленнее, чем скутер против течения, а по течению скутер идёт в 4 раз быстрее, чем теплоход против течения. Во сколько раз собственная скорость скутера больше собственной скорости теплохода? (Собственная скорость — скорость в неподвижной воде.)

4.1.97. Непослушный ребёнок находится от отца на расстоянии 26 своих шагов. В то время, как он делает 4 шага, отец успевает сделать три шага. Но отец проходит за два своих шага столько же, сколько ребёнок за три. Через сколько своих шагов отец догонит ребёнка, убегающего от отца?

4.1.98. Дана последовательность: 125; 248; 369; 488; ... Она обладает тем свойством, что разность соседних членов (из большего по номеру вычитается меньший) образует арифметическую прогрессию. Найдите сто двадцать пятый член данной последовательности.